

采样长度对阻尼识别的影响

闫 凯¹, 赵晓丹¹, 连海平¹, 程 惠¹, 孙黎明²

(1. 江苏大学 汽车与交通工程学院,江苏 镇江 212013;
2. 洛阳拖拉机研究所有限公司 拖拉机动力系统国家重点实验室,河南 洛阳 471039)

摘 要: 传统观点认为阻尼识别方法受截断误差影响;增加采样长度,即增加采样点数,提高频率分辨率,可以减少误差,形成了采样时间长(即采样点数多)阻尼识别误差小的观点。但实际采样信号中包含噪声,对采样信号进行傅里叶变换时,噪声信号随阻尼信号一同被积分。将振动衰减信号作傅里叶变换,得出当采样时间超过 $4.6/n$ (n 为阻尼值) 时振动衰减信号频谱幅值与采样点数呈反比关系;对噪声使用统计分析,噪声频谱实际发生值不是期望值,而是主要在期望值与三倍标准差之间浮动,将噪声信号作积分推导出噪声频谱幅值与采样点数的开方值呈反比关系。得出采样时间过长时,噪声信号将掩盖振动衰减信号,导致阻尼识别误差变大,通过计算推导得出了采样点数临界值的计算公式;运用仿真算例与悬臂梁敲击试验进行了验证。

关键词: 采样点数;傅里叶变换;噪声;频谱;阻尼
中图分类号: TB123 **文献标志码:** A **DOI:**10.13465/j.cnki.jvs.2019.10.018

Influence of sampling length on the damping identification

YAN Kai¹, ZHAO Xiaodan¹, LIAN Haiping¹, CHENG Hui¹, SUN Liming²

(1. School of Automobile and Traffic Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;
2. State Key Laboratory of Power State of Tractor, Luoyang Tractor Research Institute Co., Ltd., Luoyang 471039, China)

Abstract: Conventional view holds that the damping identification method is influenced by truncation error, increasing the number of sampling points and improving the frequency resolution can reduce errors, forming a view that the more the sampling points, the smaller the damping identification error. But, the actual sampling signal usually contains noise, when the Fourier transform is applied on the sampling signal, the noise signal is also integrated together with the damping signal. It is found doing the Fourier transform on a vibration attenuation signal with the sampling time over $4.6/n$ (n is damping value), the amplitude of the vibration attenuation signal is inversely proportional to the number of sampling points. When using the statistical analysis on a noise signal, the actual occurrence value of the noise spectrum is not the expected value but mainly fluctuates between the expected value and the tripple of standard deviation. Through the inner product operation of the noise signal, it is shown the noise spectrum amplitude is inversely proportional to the square root of the sampling points. When the sampling time is too long, the noise signal will cover the vibration attenuation signal, which results in a larger damping identification error. Through calculations, the formula of sampling threshold was derived and verified by simulation examples and cantilever beam experiments.

Key words: sampling points; Fourier transform; noise; frequency spectrum; damping ratio

阻尼表征振动衰减与能量耗散程度,是决定结构动力特性的重要参数^[1]。准确识别结构的阻尼值,可以提高动力分析结果的可靠性;而阻尼值变化的准确识别,还可用于发现结构产生的细小裂纹等故障诊断

方面。工程应用中,识别不准的阻尼值也会给很多方面的研究带来问题,识别精度不高会限制阻尼识别在故障诊断等方面的应用,提高阻尼识别精度一直是学者们所关心的焦点。目前阻尼识别的方法主要有:使用多单元传递函数方程计算阻尼值的传递函数法^[2];融合大容量数据谱分析技术和频域任意区间聚焦细化技术的大容量数据谱分析法;通过局部频率细化频率提高阻尼识别精度的细化与大容量数据采集分析法^[3];通过线性插值法近似确定频谱函数图像中半功

基金项目: 江苏高校优势学科建设工程基金项目(PAPD);拖拉机动力系统国家重点实验室项目(SKT2016013)

收稿日期: 2018-01-10 修改稿收到日期: 2018-03-14

第一作者 闫凯 男,硕士生,1993 年生

通信作者 赵晓丹 男,博士,教授,1963 年生

率点进而计算阻尼值的半功率带宽法及其改进方法等^[4-5],此类阻尼识别方法都以傅里叶变换作为理论基础。傅里叶变换受截断误差影响^[6],导致阻尼识别结果精度降低,尤其当识别阻尼值较小时,由于其固有频率附近谱峰较窄^[7-8],时域截断造成的能量泄漏对阻尼识别影响增加,为减小这一影响,使用增大采样长度的方法以减小截断误差^[9]。傅里叶变换理论分析是当积分时段趋向于无穷时截断误差为零,同时时间趋向于无穷时噪声频谱的期望值也为零,受这二点理论分析的影响容易形成采样时间越长,阻尼识别精度越高的结论,进而在工程实践中指导阻尼识别使用长数据分析。如在阻尼识别应用中,陈正林^[10]使用采样时间为20 s、采样点数为20 000的长数据对曲轴阻尼进行识别;在桥梁领域,刘汉夫^[11]提出应尽可能的增大数据采样量,采用更长的数据分析来保证阻尼分析结果的可靠。

在工程领域中,对信号的采集不可避免的会存在着随机噪声的干扰^[12]。对工程信号作傅里叶变换的同时,噪声信号也在作积分运算,以采样分析时间到无穷得出采样越长识别精度越高的结论没有考虑到噪声信号随振动衰减信号一同被积分时的变化关系,本文考虑这一细节,分析了振动衰减信号和噪声信号频谱随采样点数的比例关系,得出当采样点数超过某一临界值时,噪声频谱幅值会高于振动衰减信号频谱幅值,此时将导致阻尼识别精度下降,对所做的分析进一步使用仿真计算及悬臂梁实验进行了验证。

1 理论分析

设存在一工程信号

$$x(t) = x_0(t) + x_n(t) \quad (1)$$

式中: $x_0(t)$ 为振动衰减信号; $x_n(t)$ 为随机噪声干扰信号。

1.1 振动衰减信号频谱分析

振动衰减信号复数形式表示为

$$x_0(t) = Ae^{-nt} \cos(\omega_d t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{-nt} e^{j(\omega_d t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{-nt} e^{-j(\omega_d t + \varphi)} \quad (2)$$

式中: A 为信号振幅; n 为信号衰减系数; ω_d 为有阻尼固有频率。为方便分析,将相位角 φ 取值为零。

对 $x_0(t)$ 做傅里叶变换,当频率 $\omega = \omega_d$ 时,振动衰减信号取得频谱幅值,其傅里叶变换可以表示为

$$X(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T x_0(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2T} \int_0^T e^{-nt} dt + \frac{A}{2T} \int_0^T e^{-nt} e^{-j2\omega_d t} dt \quad (3)$$

分析式(3),根据 Riemann-Lebesgue 定理^[13]可知,若 $g(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 内连续或逐段连续,则 $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \cos pxdx = 0$ 或 $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \sin pxdx = 0$, 即一个连续函数与一个高频函数乘积的积分趋向于零,式

(3)中后一项的被积函数是一个单调减函数 e^{-nt} 和一个周期函数 $e^{-j2\omega t}$ 的乘积,前一项的被积函数是同一个单调递减函数 e^{-nt} 和常数 1 的乘积,常数的周期可以看作无限大,频率可以看作无限小,此时函数 $e^{-j2\omega t}$ 的频率远大于前一项积分中常数 1 的频率,因此后一项的积分结果趋向于零,远远小于前一项的结果,故计算中可以忽略。进一步化简式(3),得

$$X(\omega) = \frac{A(1 - e^{-nT})}{2nT} \quad (4)$$

采样时间 T , 采样频率 f_s 与采样点数 N 存在以下关系

$$T = \frac{N}{f_s} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),振动衰减频谱幅值可以表示为

$$|X(\omega)| = \left| \frac{f_s \cdot A(1 - e^{-nT})}{2n \cdot N} \right| \quad (6)$$

分析式(6)可知该函数为单调递减函数,当 nT 取值为 4.6 时, e^{-nT} 值为 0.01, 即 $(1 - e^{-nT}) \approx 1$, 故当 $T \geq 4.6/n$ 时,振动衰减信号频谱幅值为

$$|X(\omega)| = \frac{A \cdot f_s}{2n \cdot N} \quad (7)$$

1.2 噪声信号频谱分析

对噪声干扰信号 $x_n(t)$ 作时域-频域转换,得到噪声干扰信号的幅频关系。设工程信号中的噪声干扰信号 $x_n(t)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 记为向量 x_n , 将噪声向量 x_n 与傅里叶变换基向量 e_k 进行内积运算^[14], 结果表示为 $Z(\omega)$

$$Z(\omega) = \langle \vec{x}_n, \vec{e}_k \rangle =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{ni} \left(\cos\left(\frac{2\pi f_s k \Delta t}{N} \cdot i\right) - j \sin\left(\frac{2\pi f_s k \Delta t}{N} \cdot i\right) \right) \quad (8)$$

分析式(8),噪声干扰 x_{ni} 为服从正态分布的随机信号,且独立正态分布随机变量的线性组合仍然具有正态分布的特性^[15], 故 $Z(\omega)$ 是一个服从正态分布的随机函数。对 $Z(\omega)$ 的实部求期望得

$$E\{\text{Re}(Z(\omega))\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{ni} \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot \Delta t \cdot i)\right\} \quad (9)$$

噪声干扰信号 x_{ni} 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 即 $E\{x_{ni}\} = 0$, 可得其实部的期望值也为零

$$E\{\text{Re}(Z(\omega))\} = 0 \quad (10)$$

对 $Z(\omega)$ 实部求方差得

$$\text{Var}\{\text{Re}(Z(\omega))\} = E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{ni} \cdot \cos(k\omega\Delta t \cdot i)\right)^2\right\} \quad (11)$$

由统计学分析知,服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的随机噪声 x_n , 当 $i \neq j$ 时

$$E\{x_{ni} \cdot x_{nj}\} = 0 \quad (12)$$

当 $i = j$ 时

$$E\{x_{ni} \cdot x_{nj}\} = E\{x_{ni}^2\} = \sigma^2 \tag{13}$$

将式(12)、式(13)代入式(11),化简得

$$Var\{\text{Re}(Z(\omega))\} = \frac{\sigma^2}{2N} \tag{14}$$

由式(10)和式(14)可知 $Z(\omega)$ 的实部 $\text{Re}(Z(\omega))$ 服从正态分布 $N(0, (\sigma/\sqrt{2N})^2)$;同理可得 $Z(\omega)$ 的虚部 $\text{Im}(Z(\omega))$ 也服从正态分布 $N(0, (\sigma/\sqrt{2N})^2)$ 。基于正态分布的特性分析可知,期望为零的正态分布信号幅值大于 3 倍标准差的概率为 0.003,是小概率事件。因此 $\text{Re}(Z(\omega)) > 3\sigma/\sqrt{2N}$ 和 $\text{Im}(Z(\omega)) > 3\sigma/\sqrt{2N}$ 同时发生也是小概率事件,即

$$|Z(\omega)| = \sqrt{\text{Re}(Z(\omega))^2 + \text{Im}(Z(\omega))^2} > 3\sigma/\sqrt{N} \tag{15}$$

式(15)成立是小概率事件。由此认为,随机噪声信号 x_{ni} 频谱幅值区间为 $[0, 3\sigma/\sqrt{N}]$,即噪声频谱的幅值为

$$|Z(\omega)| = \frac{3\sigma}{\sqrt{N}} \tag{16}$$

1.3 噪声对阻尼识别的影响

由以上分析可知,噪声干扰信号频谱期望值为零,但实际发生值不是零,而是主要在区间 $[0, 3\sigma/\sqrt{N}]$ 内浮动。分析式(7)和式(16),当采样频率一定时,振动衰减信号频谱幅值反比与采样点数 N ,而噪声干扰信号频谱幅值反比于 \sqrt{N} ,振动衰减信号频谱的衰减速度远大于噪声信号频谱的衰减速度。随着采样点数 N 的增大,噪声的干扰严重,阻尼识别误差变大。当采样点数增大到某一数值时,此时振动衰减信号幅值依概率可能等于噪声干扰信号幅值;超过这一数值,噪声干扰信号频谱幅值将会大于真实响应信号幅值,使得真实响应被噪声掩盖,本文将这一采样点数值定义为临界采样点数 N_l 。对式(7)和式(16)联立方程求解得到临界采样点数 N_l 的计算公式

$$N_l = \frac{A^2 \cdot f_s^2}{36 \cdot \sigma^2 \cdot n^2} \tag{17}$$

2 模拟及计算分析

为了更清晰的反映采样长度对阻尼识别的影响,使用模拟仿真对其进行了计算分析。给出一受噪声污

染的信号

$$x(t) = 2e^{-nt} \cos(\omega_d t) + x_n(t) \tag{18}$$

式中:信号频率 f 为 50 Hz;阻尼比 ξ 为 0.02;无阻尼固有频率 $\omega_n = 2\pi f$;衰减系数 $n = \xi\omega_n$;有阻尼固有频率 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$; $x_n(t)$ 为服从正态分布 $N(0, 0.36)$ 的高斯白噪声^[16]。采样频率 f_s 选取 2 000 Hz,采样点数选取 500 点、2 000 点、8 000 点和 32 000 点,分别采用经典的半功率带宽法和内积法对信号 $x(t)$ 进行阻尼识别。

阻尼识别结果如表 1 所示。从阻尼识别结果看,相比之下内积法阻尼识别精度较半功率带宽法高;两种阻尼识别方法都在 2 000 采样点附近有较高的识别精度;两组阻尼识别结果的相对误差都存在先减少后增大趋势。说明并非采样点数越多,阻尼识别精度越高。

表 1 仿真计算阻尼识别结果

Tab. 1 Damping recognition results of simulation				
阻尼比理论值	阻尼识别方法	采样点数/点	识别结果	相对误差/%
0.02	半功率带宽法	500	0.083 3	316.67
		2 000	0.020 1	0.40
		8 000	0.015 1	24.62
		32 000	0.002 5	87.42
0.02	内积法	500	0.018 4	8.24
		2 000	0.019 9	0.57
		8 000	0.019 2	3.82
		32 000	0.022 7	13.38

图 1 为采样点数分别为 500 点、2 000 点、8 000 点和 32 000 点时信号 $x(t)$ 所对应的频谱图。由 $x(t)$ 的频谱图分析可得,当采样点数为 500 点时,采样时间 T 为 0.25 s,小于 $4.6/n$,此时截断误差大,导致阻尼识别结果误差较大。采样点数为 2 000 点时,此时采样点数增大,采样信号的截断误差减小,且噪声信号对真实响应信号干扰较小,阻尼识别结果误差小。采样点数为 8 000 点时,噪声信号对真实响应信号干扰开始增大,阻尼识别结果误差增大。采样点数为 32 000 点时,此时采样点数已超出由式(17)计算得出的临界采样点数 31 304 点,噪声信号对真实响应信号干扰大,阻尼识别结果已经偏离实际值。

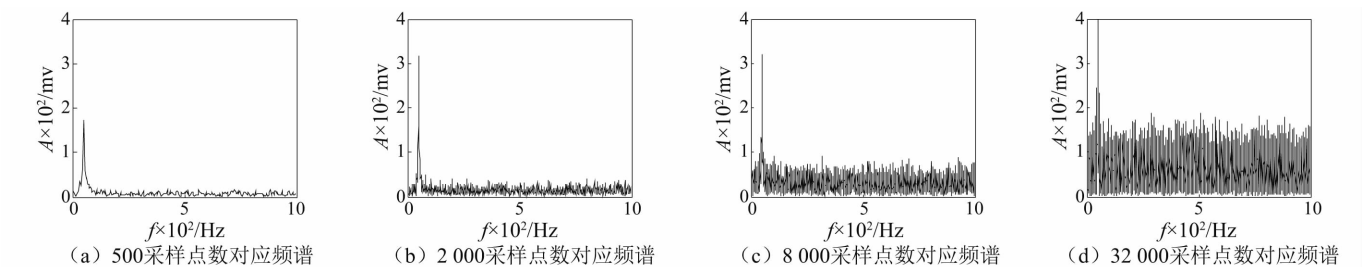


图 1 信号 $x(t)$ 频谱图

Fig. 1 Signal $x(t)$ spectrum diagram

3 悬臂梁阻尼测试实验

工程应用中很多结构都可以简化为梁式结构,而悬臂梁结构是其中常见的类型。从工程应用角度出发,选取了悬臂梁结构做阻尼测试实验。实验装置图如图2所示。选取一根钢质悬臂梁,其具体的参数为:悬臂梁长宽高分别为1 000 mm,50 mm和14 mm;悬臂梁固定端用螺栓和压板紧固在试验台架上,用铜质力锤敲击悬臂梁,通过安装在末端的加速度传感器测得自由端振动信号。

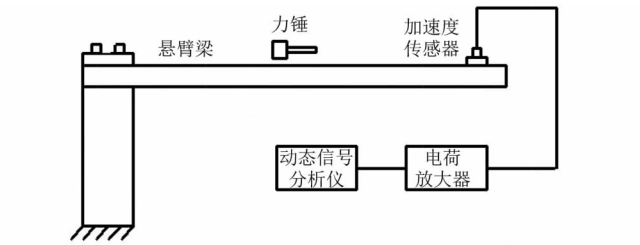


图2 实验装置简图
Fig.2 Experimental device diagram

对自由端振动信号进行数据采集,采样频率为5 000 Hz。采样点数为5 000点时,其信号频谱图如图3所示。由图可看出悬臂梁响应信号模态主要有六个,分别为约10 Hz,约60 Hz,约200 Hz,约400 Hz,约600 Hz及约900 Hz。此处以约200 Hz模态为例,采用半功率带宽法和内积法进行阻尼识别。

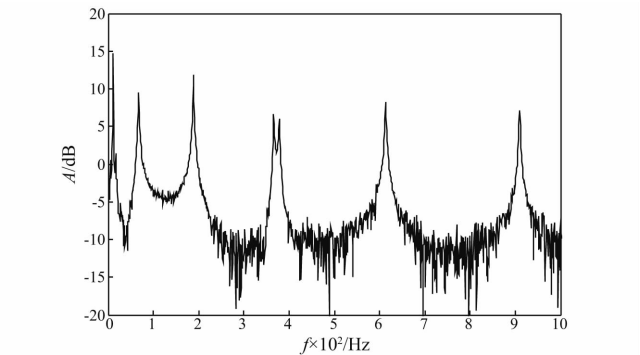


图3 悬臂梁响应信号频谱图
Fig.3 Cantilever response signal frequency spectrum

分别以5 000点和25 000点采样点数对约200 Hz模态进行阻尼识别,结果如表2所示,不同采样长度对应的阻尼识别结果有差别。

表2 悬臂梁200 Hz附近模态阻尼识别结果

Tab.2 Damping identification results of the cantilever beam modal near 200 Hz

特征模态	诊断方法	采样点数	识别结果
约200 Hz模态	半功率带宽法	5 000	0.003 8
		25 000	0.002 0
	内积法	5 000	0.003 0
		25 000	0.003 5

为确定准确的阻尼值,识别出该模态参数后,以此参数构造出阻尼识别信号,并从总信号中将此估计信号减去,当识别结果准确时,剩余信号频谱中对应频率附近能量变得很小,剩余频谱图里观察不到明显峰值。仿真算例已经验证内积法相比与半功率带宽法有着更高的识别精度,此处以内积法为例,分别将5 000采样点和25 000采样点时所识别出的约200 Hz模态信号从原信号中减去,剩余信号频谱如图4所示。从图4可知,采样点数为5 000点时,减去识别阻尼信号后,剩余信号200 Hz附近观察不到明显峰值,此阶模态信号已被剔除;采样点数为25 000点时,减去识别阻尼信号后,剩余信号200 Hz附近仍然可以观察到明显峰值。

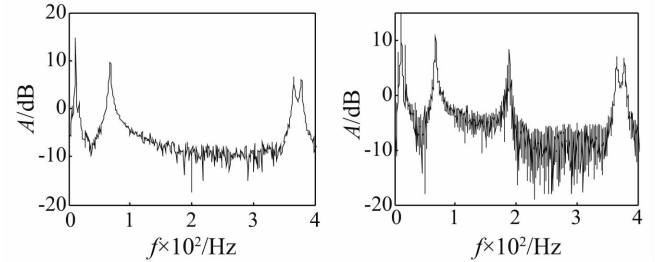


图4 悬臂梁200 Hz附近剩余信号频域对比图
Fig.4 Remainder signal contrast frequency domain diagram near 200 Hz of the cantilever beam

由悬臂梁阻尼识别实验可以看出,当采样点数为5 000点时,此时阻尼识别精度已经很高,模态信号能够被准确识别出;采样点数继续增加到25 000点,此时受噪声干扰影响增大,误差反而增大,阻尼识别结果不够准确,故增加采样点数不一定能提高阻尼识别精度,进一步验证了本文的结论。

4 结 论

- (1) 当傅里叶积分时段趋近于无穷时,噪声频谱期望值为零,但是其实际发生值不是期望值,而是主要是在零与三倍标准差之间浮动,对阻尼引起的振动衰减信号的识别不能忽略噪声频谱实际发生值对振动衰减信号的影响,根据期望值为零得到采样点数越多识别结果越精确这一观点不适合于阻尼诊断。
- (2) 适当增加采样点数可以提高阻尼的识别精度,但采样点数并不是越多越好,采样点数超过临界值取值会导致诊断出的结果与理论值误差不降反升。
- (3) 通过仿真计算及悬臂梁结构敲击实验表明采样点数过多时阻尼识别精度反而降低,验证了本文的理论分析。建议阻尼识别采样点数不超过临界值取值,为工程应用中采样点数的选取提供参考。

参 考 文 献

[1] 应怀樵,沈松,刘进明. “ZOOMBDFT”法高精度求系统阻尼比的探讨[J]. 振动、测试与诊断,1997(2): 44 – 48.
YING Huaqiao, SHEN Song, LIU Jinming. Investigation on

high precision calculation for damping ratio using “ZOOMBDFT” method [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 1997(2): 44 – 48.

[2] 裴强,王丽. 结构参数识别方法研究[J]. 大连大学学报, 2013,34(6): 36 – 44.

PEI Qiang, WANG Li. Review of parameter identification methods for vibrating system [J]. Journal of Dalian University, 2013, 34(6): 36 – 44.

[3] 应怀樵,李惠彬,沈松. 关于用 INV 的频率细化与大容量数据采集分析技术提高阻尼比的计算精度的研究[J]. 噪声与振动控制,1997(2): 17 – 20.

YING Huaiqiao, LI Huibin, SHEN Song. The research of improving damping ratios calculation accuracy based on INV of zoom broad data fourier transform[J]. Journal of Noise and Vibration Control, 1997(2): 17 – 20.

[4] 陈奎孚,焦群英. 半功率点法估计阻尼比的误差分析[J]. 机械强度,2002(4): 510 – 514.

CHEN Kuifu, JIAO Qunying. Influence of linear interpolation approximation to half power points on the damping estimation precision[J]. Journal of Mechanical Strength, 2002 (4): 510 – 514.

[5] 陈奎孚,张森文. 半功率法估计阻尼的一种改进[J]. 振动工程学报,2002,15(2): 151 – 155.

CHEN Kuifun, ZHANG Senwen. Improvement on the damping estimation by half power point method[J]. Journal of Vibration Engineering, 2002,15(2): 151 – 155.

[6] 胡峰,吴波,胡友民,等. 利用粒子群优化算法实现阻尼比和频率的精确识别[J]. 振动与冲击,2009,28(7): 8 – 11.

HU Feng, WU Bo, HU Youmin, et al. Accurate identification of damping ratio and frequency by particle swarm optimization [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(7): 8 – 11.

[7] 苏向荣,丁康,谢明. 用传递函数估计小阻尼的新方法[J]. 机械科学技术,2003,22(5): 717 – 720.

SU Xiangrong, DING Kang, XIE Ming. A new method for exactly estimating small damping by transfer function [J]. Mechanical Science and Signal Processing, 2003, 22 (5): 717 – 720.

[8] 丁康,谢明,苏向荣. 一种精确计算结构小阻尼的新方法[J]. 西安交通大学学报,2003(9): 929 – 932.

DING Kang, XIE Ming, SU Xiangrong. New method for exact estimation of small damping of structure[J]. Journal of Xi’an Jiaotong University, 2003(9): 929 – 932.

[9] 赵晓丹,徐俊杰,王西富. 利用分段积分识别阻尼比研究[J]. 振动与冲击,2015,34(20): 109 – 114.

ZHAO Xiaodan, XU Junjie, WANG Xifu. Using piecewise integral identification damping ratio study [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015,34(20): 109 – 114.

[10] 陈正林. 内积模极值方法在曲轴阻尼识别中的运用[J]. 内燃机,2015(4): 39 – 41.

CHEN Zhenglin. Application of inner product modulus maximum method in damping identification of crankshaft[J]. Internal Combustion Engines, 2015(4): 39 – 41.

[11] 刘汉夫. 桥梁阻尼测试与分析方法研究[J]. 铁道建筑, 2011(2): 7 – 10.

LIU Hanfu. Bridge damping test and analysis methods [J]. Railway Engineering, 2011(2): 7 – 10.

[12] 苏向荣. 随机噪声对频谱校正精度的影响和结构小阻尼的精确估计[D]. 汕头:汕头大学,2004.

[13] 赵红发,南广仁. Riemann-Lebesgue 定理的推广[J]. 长春师范学院学报(人文社会科学版),2008,7(5): 3 – 4.

ZHAO Hongfa, NAN Guangren. The extension of Riemann-Lebesgue theorem [J]. Journal of Changchun Normal University(Humanities and Social Sciences), 2008, 7(5): 3 – 4.

[14] 赵晓丹,刘涛. 基于内积模极值的小阻尼计算新方法[J]. 机械科学与技术,2009,28(10): 1308 – 1310.

ZHAO Xiaodan, LIU Tao. A new method of small damping calculation based on the extreme value of inner product model [J]. Mechanical Science and Technology, 2009, 28(10): 1308 – 1310.

[15] 陆旋. 数理统计基础[M]. 北京:清华大学出版社,2004.

[16] HAYKIN S. 信号与系统[M]. 北京:电子工业出版社,2006.

(上接第 97 页)

[16] FANG Jiancheng, XU Xiangbo, XIE Jinjin. Active vibration control of rotor imbalance in active magnetic bearing systems [J]. Journal of Vibration and Control, 2015, 21(4): 684 – 700.

[17] 廖存孝,徐向波,刘强. 含转子不平衡的磁轴承建模与同频电流抑制[J]. 振动、测试与诊断, 2014, 34(6): 1057 – 1064.

MIAO Cunxiao, XU Xiangbo, LIU Qiang. Model development and synchronous current suppression in active magnetic bearing systems with rotor imbalance [J]. Jouranal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2014, 34(6): 1057 – 1064.

[18] JIANG Kejian, ZHU Changsheng, TANG Ming. A uniform control method for imbalance compensation and automation balancing in active magnetic bearing-rotor systems [J]. Journal of Dynamic Systems Measurement & Control, 2012, 134(2): 1 – 13.

[19] MARKUS H, GERALD K, MANFRED S. Redundant unbalance compensation of an active magnetic bearing system [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 94: 267 – 278.